

Zur Schallausbreitung in verdünnten Gasen

Kohler, Max

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 2, 1950,
S. 104-108



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Zur Schallausbreitung in verdünnten Gasen

Von **Max Kohler**, Braunschweig

Vorgelegt von Herrn **E. Justi**

Summary: Dispersion of sound in rarified monoatomic gases is calculated from a kinetical point of view, using the approximation of Burnett-Chapman. The resulting dispersion-effect is greater by about 50–70% than the hydrodynamical dispersion by viscosity and conduction of heat. This effect is, in agreement with similar considerations of Wang Chang & Uhlenbeck, only little sensible against changes of the model of molecule.

Einleitung

Die Strömungslehre in verdünnten Gasen, die sog. Superaerodynamik, besitzt neuerdings besonderes technisches Interesse infolge ihrer Anwendung in der hohen Atmosphäre¹⁾. Da die mittlere freie Weglänge des Gases nicht mehr sehr klein ist gegenüber den Körperdimensionen, treten Abweichungen von der gewöhnlichen Kontinuumsmechanik der Gase auf. Diese Abweichungen sind zurückzuführen auf: a) Änderungen der Strömungsgesetze im Gasinnern, b) Änderungen der Grenzbedingungen zwischen Gasraum und Festkörper. Das allgemeine Problem der Formulierung der Strömungsgesetze der Superaerodynamik ist äußerst verwickelt und bisher nur in Grenzfällen gelungen. Zur Erforschung der Verhältnisse im Innern des Gasraumes können Experimente über die Schallausbreitung herangezogen werden.

Bei der Betrachtung eines Gases als ideale, kompressible Flüssigkeit, ist die Schallgeschwindigkeit eine konstante Größe (ohne Dispersion). Außerdem erfährt eine Schallwelle dann keine Dämpfung (verschwindende Absorption). Seit Laplace wird der Schallausbreitungsvorgang als adiabatisch angesehen. Als Begründung wird im allgemeinen dafür angegeben, daß die mäßige Wärmeleitung der Gase nicht in der Lage sei, die Isothermie des Vorgangs zu erzwingen. Diese Überlegung ist aber nicht mehr stichhaltig in dem Grenzfall verdünnter Gase, wo die Temperaturleitfähigkeit der Gase hohe Werte annimmt. Zweifellos bewirkt die Wärmeleitung in diesem Falle eine Annäherung an den isothermen Grenzfall, also eine Verkleinerung der Schallgeschwindigkeit. Es kommt aber noch ein weiterer Effekt hinzu, nämlich die Wirkung der Gasreibung, die im entgegengesetzten Sinne auf die Schallgeschwindigkeit wirkt wie die Wärmeleitung, nämlich geschwindigkeitsvergrößernd. Die bisherigen Überlegungen bezogen sich streng genommen auf einatomige Gase. In mehratomigen Gasen, wo innere Freiheitsgrade angeregt sind, können weitere Dispersions- und Absorptionsursachen des Schalles auftreten, die mit der endlichen Einstellzeit der Energie der Freiheitsgrade zusammenhängen. Auf diese Probleme soll hier jedoch nicht eingegangen werden, da sie in vieler Hinsicht schon untersucht sind²⁾. Die folgenden Betrachtungen bleiben daher wesentlich auf einatomige Gase beschränkt.

Die Berechnung der Schallabsorption ebener Wellen auf Grund von Wärmeleitung und Reibung erfolgte durch Kirchhoff, diejenige der Schalldispersion zuerst von Herzfeld und Rice³⁾. Gaskinetische Überlegungen zeigen nun, daß die Kirchhoffsche Berechnung der Schallabsorption auf hydrodynamischer Basis korrekt ist, während die hydrodynamische Berechnung der Schalldispersion wesentlicher gaskinetischer Verbesserungen bedarf. Dies hängt damit zusammen, daß die Schallabsorption infolge Reibung und Wärmeleitung ein linearer Effekt in der mittleren freien Weglänge ist, während die Schalldispersion vom 2. Grade in der freien Weglänge wird. Dieser Einwand gegen die hydrodynamische Berechnungsweise der Schallgeschwindigkeit wurde in der Literatur zuerst von Primakoff⁴⁾ und Tsien und Schamberg⁵⁾ erhoben. Diese Autoren legen ihren Berechnungen einen Ausdruck höherer Näherung für den Wärmestrom in inhomogenen Gas zugrunde, der erstmalig von Chapman und Cowling⁶⁾ angegeben wurde. Dieser Ausdruck enthält aber, wie vom Verfasser schon früher festgestellt wurde⁷⁾, einen Vorzeichenfehler, der demgemäß das Ergebnis obiger Autoren für die Schallgeschwindigkeit beeinflusst hat. Die eigenen Ergebnisse für den Ausdruck des Wärmestromes höherer Näherung decken sich mit denen, die Wang Chang und Uhlenbeck⁸⁾ erhielten. Die typisch gaskinetischen Glieder höherer Näherung für den Wärmestrom und die Reibungskraft verstärken die Zunahme der Schallgeschwindigkeit mit wachsender Frequenz erheblich, wie später gezeigt wird.

Bei Normaldrucken tritt diese Schalldispersion erst bei extrem hohen Frequenzen auf (von der Größenordnung 10^9 Hz.). Bei niedrigen Drucken wird dieser Effekt in ein praktisch gut erreichbares Frequenzgebiet verschoben.

I. Die kinetischen Grundlagen

Die kinetische Theorie liefert die hydrodynamischen Gleichungen für ein einatomiges Gas in voller Strenge in folgender Form (eindimensional formuliert):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho \cdot u) = 0, \quad (1)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \varrho \cdot X, \quad (2)$$

$$\varrho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\varrho} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\varrho} \right) \right] + \frac{\partial q_x}{\partial x} + p_{xx} \cdot d_{xx} = 0, \quad (3)$$

wo ϱ die Gasdichte, u die Strömungsgeschwindigkeit des Gases in der x -Richtung, p_{xx} eine Komponente des Drucktensors, $d_{xx} = \partial u / \partial x$ eine Komponente des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit, q_x die x -Komponente der Wärmestromdichte, Q die Energiedichte je Volumeinheit und X die äußere Kraft je Masseneinheit in der x -Richtung. Wesentlich kinetische Betrachtungen stecken nun in der Berechnung von p_{xx} und q_x . Es ist dabei zweckmäßig, die Zerlegung vorzunehmen:

$$p_{xx} = p + p'_{xx}, \quad (4)$$

wo p der hydrostatische Druck (welcher der Zustandsgleichung des idealen Gases gehorcht) und p'_{xx} der Reibungsdruck ist.

Ist f_0 die lokale Maxwell-Verteilung der Geschwindigkeit der Moleküle, so ist die Geschwindigkeitsverteilung im inhomogenen Gas (d.h. bei vorhandenen Temperatur- und Geschwindigkeitsinhomogenitäten) näherungsweise gegeben durch:

$$f = f_0(1 + \varphi_1 + \varphi_2), \quad (5)$$

wo φ_1 ein in dem Verhältnis der mittleren freien Weglänge zur Schallwellenlänge linearer Ausdruck ist, während φ_2 von der 2. Ordnung in diesem Verhältnis ist. Berücksichtigt man nur das Glied φ_1 in (5), so erhält man für die Reibungskraft p'_{xx} und die Wärmestromdichte q_x die Ausdrücke (T abs. Temperatur):

$$p'_{xx} = -\frac{4}{3} \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6a)$$

$$q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (6b)$$

In (6a) ist η der gewöhnliche Koeffizient der Gasreibung und in (6b) λ die Wärmeleitfähigkeit. Zusammen mit (6a) und (6b) sind die Gleichungen (1) bis (3) die Gleichungen von Navier-Stokes.

Berücksichtigt man in (5) aber noch φ_2 , so folgt:

$$p'_{xx} = p'^{(1)}_{xx} + p'^{(2)}_{xx}, \quad (7a)$$

$$p'^{(2)}_{xx} = \frac{4}{3} \beta_1 \cdot \frac{\eta^2}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2\beta_2 \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (7b)$$

$$q_x = q_x^{(1)} + q_x^{(2)}, \quad (7c)$$

$$q_x^{(2)} = 2\beta_2 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{45}{8} \cdot \beta_3 \cdot \frac{\eta^2}{\varrho T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}. \quad (7d)$$

Die Glieder $p'^{(2)}_{xx}$ und $q_x^{(2)}$ sind die Nicht-Stokesschen Glieder kinetischen Ursprungs. In diesen Formeln sind $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ Zahlwerte der Größenordnung 1, deren genauer Wert vom Molekülmodell abhängig ist, d.h. von dem Wechselwirkungsgesetz der Moleküle beim Zusammenstoß. Die Bestimmung der β -Werte ist nur durch eine hinreichend genaue Lösung der Boltzmann-Gleichung für die Verteilungsfunktion der Moleküle möglich. Für Maxwell-Moleküle (das sind solche, die sich beim Zusammenstoß mit der reziproken 5. Potenz der Entfernung abstoßen) erhält man:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1 \text{ (Maxwell-Moleküle)}. \quad (8a)$$

Für starre Kugelmoleküle (Billard-Kugeln) folgt⁹⁾:

$$\beta_1 = 1,014; \quad \beta_2 = 0,806; \quad \beta_3 = 1,036. \quad (8b)$$

Für andere Molekülmodelle ist nichts bekannt. Es ist aber allgemein gezeigt worden¹⁰⁾, daß in den Gleichungen (7b) und (7d) nur drei verschiedene β -Koeffizienten auftreten, indem β_2 in beiden Gleichungen vorkommt. Diese Aussage ist für beliebige Molekülmodelle richtig. Das 1. Glied in (7d) hat bei Chapman und Cowling entgegengesetztes Vorzeichen.

Führt man nun unter Zugrundelegung dieses modifizierten Reibungs- und Wärmeleitungsgesetzes die Berechnung der Dispersion der Schallgeschwindigkeit einer ebenen Schallwelle durch, unter konsequenter Vernachlässigung

von Gliedern höheren Grades als dem 2. Grad in η , so erhält man für die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v von der Kreisfrequenz ω der Schallwelle:

$$v = v_0 \left\{ 1 + \frac{\omega^2 \tau^2}{2\gamma^2} \left[\frac{4}{3} + \frac{10}{3} A \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} - \frac{A^2}{4\gamma^2} (\gamma-1) (7-3\gamma) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{2} \beta_3 + \frac{20}{9} \beta_1 - \frac{8}{3} \beta_2 \right] \right\}, \quad (9)$$

$$\tau = \frac{\eta}{p}. \quad (9a)$$

Darin sind: $\gamma = c_p/c_v$ das Verhältnis der spez. Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen, $A = \lambda/\rho \cdot c_v$ und v_0 die gewöhnliche Laplacesche Schallgeschwindigkeit $\sqrt{\gamma \cdot p/\rho}$.

II. Diskussion der Ergebnisse

Die ersten drei Glieder in der eckigen Klammer von (9) geben die Dispersion der Schallgeschwindigkeit, wie sie sich bei Berücksichtigung von Reibung und Wärmeleitung hydrodynamisch ergibt. Für ein einatomiges Gas ($\gamma = 5/3$, $A = 5/2$) folgt:

$$v_{\text{hydrodyn.}} = v_0 \left(1 + \frac{141}{200} \omega^2 \tau^2 \right). \quad (10a)$$

Würde man nur die Wärmeleitung berücksichtigen, so wäre in der eckigen Klammer von (9) nur das 3. Glied zu berücksichtigen und alle übrigen wären Null. Man erhält so:

$$v_{\text{Wärmeleitung}} = v_0 \left[1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{8\gamma^4} (\gamma-1) (7-3\gamma) \cdot A^2 \right]. \quad (10b)$$

In Übereinstimmung mit dem in der Einleitung Gesagten, nimmt die Schallgeschwindigkeit in diesem Falle ab mit wachsender Frequenz.

Berücksichtigt man dagegen nur die Reibung, setzt also in der eckigen Klammer von (9) alle Glieder Null mit Ausnahme des ersten, so folgt:

$$v_{\text{Reibung}} = v_0 \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\omega^2 \tau^2}{\gamma^2} \right). \quad (10c)$$

Hier nimmt also die Schallgeschwindigkeit mit der Frequenz zu. Bei gleichzeitiger Wirkung von Reibung und Wärmeleitung hat man in der eckigen Klammer von (9), wie schon oben erwähnt, die drei ersten Glieder zu berücksichtigen, nicht nur das 1. und 3., die in (10b) und (10c) vorkommen. Das 2. Glied in der Klammer von (9) entsteht nur bei gleichzeitiger Wirkung von Reibung und Wärmeleitung. Insgesamt resultiert aber nach (10a) eine Geschwindigkeitszunahme mit wachsender Frequenz.

Die restlichen drei Glieder in der eckigen Klammer von (9) entsprechen den Nicht-Stokes'schen Gliedern in den Bewegungsgleichungen. Für Maxwell-Moleküle erhält man unter Berücksichtigung von (8a):

$$v = v_0 \left(1 + \frac{43}{40} \omega^2 \tau^2 \right), \quad (10d)$$

und für starre Kugelmoleküle nach (8b):

$$v = v_0 (1 + 1,19 \cdot \omega^2 \tau^2). \quad (10e)$$

Der Dispersionseffekt ist nach (10d) um etwa 50% größer als nach (10a) bei rein hydrodynamischer Rechnung. Für starre Kugelmoleküle ist der Effekt sogar um etwa 70% größer als nach (10a). Der Einfluß des speziellen molekularen Kraftgesetzes scheint nicht sehr erheblich zu sein.

Die Formel (10d) stimmt mit derjenigen überein, die Wang-Chang und Uhlenbeck angegeben haben, unterscheidet sich allerdings wesentlich von den Ergebnissen von Primakoff und Tsien und Schamberg.

Die Zeit τ ist die Relaxationszeit für den Übergang von Translationsenergie zwischen verschiedenen translatorischen Freiheitsgraden¹¹⁾.

Meßergebnisse scheinen z. Zt. noch keine vorzuliegen. Neuerdings ist allerdings die Schallabsorption in He bei sehr kleinen Drucken gemessen worden¹²⁾. Diese Messungen gestatten jedoch keine direkte Anwendung obiger Formeln.

Zusammenfassung

Die Schalldispersion in verdünnten einatomigen Gasen wird gaskinetisch berechnet unter Benutzung des Burnett-Chapmanschen Näherungsverfahrens. Der erhaltene Dispersionseffekt ist um 50 bis 70% höher als die hydrodynamische Schalldispersion infolge von innerer Reibung und Wärmeleitung. Dieser Effekt ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen ähnlicher Untersuchungen von Wang-Chang und Uhlenbeck nur wenig abhängig vom speziellen Molekülmodell.

Literatur

- 1) H. S. Tsien, Journ. of. Aeron. Sci. **13**, 653, 1946; R. Schamberg, Calif. Institute of Techn. 1947.
- 2) Zusammenfassender Bericht von E. Hiedemann, Ergebn. d. exakten Naturw. **14**, 201, 1935.
- 3) K. F. Herzfeld u. F. O. Rice, Phys. Rev. **31**, 691, 1928.
- 4) H. Primakoff, Journ. of Acoust. Soc. of Am. **13**, 14, 1942.
- 5) H. S. Tsien u. R. Schamberg, Journ. of Acoust. Soc. of Am. **18**, 334, 1946.
- 6) S. Chapman u. T. G. Cowling, „Mathematical Theory of Nonuniform Gases“. Cambridge 1939, S. 265.
- 7) M. Kohler, Bericht 34/1946 des Institut Balistique et Aerodynamique de Saint Louis (Frankreich).
- 8) C. S. Wang Chang u. G. E. Uhlenbeck, Department of Engineering Research University of Michigan APL/JHUCM-443, UMH-3-F, Febr. 1948.
- 9) M. Kohler, Zeitschr. f. Phys. **127**, 201, 1950.
- 10) Ders., Zeitschr. f. Phys. **127**, 215, 1950.
- 11) Ders., Zeitschr. f. Phys. **125**, 715, 1949.
- 12) M. Greenspan, Phys. Rev. **75**, 197, 1949.